اثرهای معادلهٔ ایستایی و تابع ترفتز بر پاسخ‌های جزء صفحهٔ خمشی چهارپهلو*

محمد رضائی پژند[۱]   معصومه ملک‌زاده گنابادی[۲]   نیلوفر رجب‌زاده صفائی[۳]

چکیده *در این پژوهش، ده جزء صفحهٔ خمشی چهارپهلو کیرشهفی نو برپایهٔ تابع تغییرمکان ترفتز و برقرارنمودن معادلهٔ ایستایی پیشنهاد می‌شود. نخست، مناسب‌ترین چیدمان‌های درجه‌های آزادی و نیز گره‌های روی جزء برپایهٔ پژوهش پیشینیان به‌دست می‌آیند. پس از آن، با بهره جستن از تقارن جمله‌ها، ده جزء با تابع میدان متفاوت برای دو چیدمان برتر، معرفی خواهند شد. واکاوی‌های عددی آشکار می‌کنند که تابع میدان برگرفته از تابع‌های ناقص ترفتز درصورت انتخاب درست جمله‌ها، با شمار درجهٔ آزادی کمتر و مرتبهٔ بالاتر نسبت به جزء‌های کامل، می‌توانند جزء‌های مفیدی را پدید آورند. چون تابع‌های ترفتز معادلهٔ ایستایی را برقرار می‌سازند، پاسخ‌های نیرویی بیشتر جزء‌ها، دقت فزون‌تری نسبت به پاسخ‌های جابه‌جایی‌ها دارند.*

واژه‌های کلیدی صفحهٔ خمشی نازک; معادلهٔ ایستایی; پاسخ تحلیلی; تابع ترفتز; جزء خمشی چهارپهلو; تابع درون‌یاب ناقص.

The Effect of Equilibrium Equation and Trefftz Functions on the Responses of Quadrilateral Bending Plate

M. Rezaiee-Pajand   M. Malekzadeh-Gonabadi   N. Rajabzadeh-Safaei

Abstract *In this study, ten novel quadrilateral Kirchhoff's bending plate elements based on the Trefftz displacement functions and satisfying equilibrium equation are suggested. First, the most suitable arrangement of degrees of freedom and nodes are achieved by benefiting from previous researches. Afterwards, using the symmetry of terms, ten elements with different interpolation functions for the two top arrangements will be introduced. Numerical tests reveal that the correct choice of the interpolation's terms from the incomplete Trefftz functions leads to more efficient elements with lower degrees of freedom and higher order than the complete elements. Since the Trefftz functions meet the equilibrium conditions, the force responses of the most cases have a higher accuracy than the displacement responses.*

Key Words Thin bending plate; equilibrium equation; analytical solution; Trefftz function; quadrilateral bending element; incomplete interpolation function.

★تاریخ دریافت مقاله ۹۴/۷/۲۷ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۴/۷ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.50733

(۱) نویسندهٔ مسئول، استاد گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی، مشهد. rezaiee@um.ac.ir

(۲) کارشناس ارشد مهندسی عمران–سازه، دانشگاه فردوسی، مشهد.

(۳) دانشجوی دکترای عمران–سازه، دانشگاه فردوسی، مشهد.

مقدمه

در صفحه‌های نازک خمشی پدیدآمده برپایهٔ نگرهٔ کیرشهف، از اثر تغییرشکل‌های برشی در جابه‌جایی سازه چشم‌پوشی می‌شود؛ درحالی‌که نگرهٔ رایزنر- میندلین [۱] این اثر را وارد تحلیل می‌کند. بنابراین، این نگره برای صفحه‌های ضخیم که تغییرشکل‌های برشی قابل‌توجهی دارند، پاسخ مناسبی را به‌دست می‌دهد.

در دسته‌ای از روش‌ها، نخست بنا به نگرهٔ کیرشهف رابطه‌های صفحهٔ نازک نوشته می‌شوند؛ سپس، با وارد کردن اثر تغییرشکل برشی، آنها را برای صفحهٔ ضخیم نیز کارا می‌سازند. در سال ۲۰۰۰، جزئی چهارپهلو با ۱۲ درجهٔ آزادی برای صفحه‌های بسیار نازک، نازک و ضخیم توسط سوه و همکارانش [2] پیشنهاد شد. در آن جزء، دوران و کرنش برشی روی پهلوها با نگرهٔ تیر تیموشنکو به‌دست آمدند. همچنین، دوران، انحنا و کرنش برشی درون جزء با فن درون‌یابی بهبودیافته در دسترس قرار گرفتند.

در نگرهٔ میندلین- رایزنر، پیوستگی مرتبه یکم C^0 کافی است و با مستقل‌شدن تغییرمکان‌ها پیوستگی بین جزئی تأمین می‌شود. شیخ و همکارانش در سال ۲۰۰۱ [3] با سه میدان تغییرمکان مستقل خیز و دو دوران برشی به‌جای دوران‌های خمشی، جزئی مثلثی برای صفحه‌های همسان‌گرد و ضخیم پدید آوردند. راهکار میدان سازگار روشی دیگر است که از پدیدهٔ قفل جلوگیری می‌کند [4, 5]. با نازک‌شدن صفحه‌ها، کرنش برشی به‌سوی صفر می‌گراید. این فرآیند با تغییر ضخامت در صفحه‌های ضخیم نیز باید دیده شود. در سال ۲۰۰۲، شیخ و همکاران [6]، با روش جزء محدود تغییرمکانی و بهره‌جویی از راهکار میدان سازگار، دو تابع میدان مستقل را با مرتبهٔ ناهمسان برای تغییرمکان جانبی و دوران خمشی به‌کار بردند.

راهکار قالب جزء محدود یا رابطه‌سازی آزاد روشی نو برای دستیابی به ماتریس سختی جزءهای محدود است. رضایی پژند و محمدزاده [7] در مقاله‌ای با این شیوه ماتریس سختی جزء چهارپهلوی خمشی را پیشنهاد دادند. باتوژ و کاتیلی [8] نیز با راهکار رابطه‌سازی آزاد، جزء چهارپهلوی صفحهٔ کیرشهف ناپیوسته DKQ را پدید آوردند. رزاق‌پور و همکارانش در سال ۲۰۰۳ [9]، جزء چهارپهلوی ٤ گرهی بهبودیافته برپایهٔ پنداشت‌های نگرهٔ کیرشهف گسسته با ۱۲ درجهٔ آزادی به نام IDKQ برای صفحه‌های نازک پیشنهاد دادند. باتوژ و همکارش [10] این پنداشت‌ها را برای مرزها و خطهای مرکزی جزء QUAD9 به‌کار گرفتند و رفتار این جزء را بهبود بخشیدند.

در سال ۱۹۲٦، ترفتز نگره‌ای نو برپایهٔ فن تغییراتی با به‌کارگیری تابع‌نخستین‌گیری‌های (انتگرال گیری‌های) مرزی را پیشنهاد داد. در این نگره، تابع‌های درون‌جزئی در معادله‌های دیفرانسیلی حاکم بر صفحه‌های نازک صدق می‌کرد. همچنین، شرط‌های مرزی و پیوستگی درون جزئی با تابع‌نخستین‌گیری به‌روش مانده‌های وزنی تأمین می‌شدند [11]. باید آگاه بود، نخستین تلاش‌ها برای ساخت یک جزء ترفتزی به سال ۱۹۷۷ برمی‌گردد [12]. زمانی که شمار تابع‌های مستقل اصلی بیش از یک باشد، نام روش پیوندی به میان می‌آید [13]. تابع‌های پیوندی می‌توانند تابع‌های تغییرمکان مستقل باشند و یا این‌که تابع تنش جداگانه‌ای فرض شود. برای بهبود تنش‌ها و نیروهای درونی در جزءها برپایهٔ تغییرمکان، می‌توان از روش تنش پیوندی بهره جست و تابعی جداگانه برای تنش‌ها پنداشت [14, 15]. در سال ۲۰۰۲، سن و همکارانش [16] تغییرمکان‌ها را با روش مشابه سوه و همکارانش در سال ۲۰۰۱ [2] به‌دست آوردند. آنها برای یافتن تنش‌ها از شیوهٔ پیوندی استفاده کردند؛ ازاین‌رو، پاسخ‌های این پژوهشگران، هم برای تغییرمکان و هم برای تنش مطلوب بود.

هرگاه دو تابع تغییرمکان مستقل، یکی در درون جزء، که معادلهٔ ایستایی را برقرار کند، و دیگری روی

مرزها، که شرطهای سازگاری و پیوستگی بین جزءها را تأمین نماید، تعریف شود، نام «ترفتز پیوندی» به جزءها داده می‌شود [14,17-19]. باید دانست، تابع‌های ترفتز مختلط هستند و به‌راحتی تمام معادله‌های دیفرانسیلی ایستایی را برقرار می‌سازند. دیگر ویژگی روش ترفتز پیوندی این است که جمله‌های حرکت جسم سخت جایی در تابع شکل درونی جزء ندارند [21,14,20]؛ حتی در شبکه‌بندی‌های درشت، جزءهای مرتبه‌بالای ترفتز، مانند جزءهای چهارپهلو با ۸ گره و مثلثی با ٦ گره از دقت بالایی، برخوردارند [22]. در سال ۲۰۱٤، با بهره‌جویی از این‌گونه جزءها و فن ترفتز پیوندی، رضایی پژند و کارکن [23] دو جزء مثلثی و چهارپهلوی مرتبه‌بالا ساختند. برای بهبود توانایی جزء، تابع شکل تیر اولر- برنولی سه‌گرهی را برای هر پهلوی جزء به‌کار بردند. پیش از این و در سال ۲۰۱۲، رضایی پژند و همکارانش [24] همین جزءهای مثلثی و چهارپهلو را با ۳ و ٤ گره نیز ساخته بودند.

در این اثر، برای رابطه‌های جزءهای محدود صفحهٔ خمشی کیرشهفی، از تابع ترفتز برای خیز بهره‌جویی خواهد شد. به‌خاطر باید سپرد، در تمامی جزءهای خانوادهٔ ترفتز، تابع میدان درونی، معادلهٔ دیفرانسیلی حاکم بر جزء را برقرار می‌کند. دو بخش عمومی و خصوصی در پاسخ‌های معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر صفحه وجود دارند. ازاین‌رو، تابع میدان نیز از جمع این پاسخ‌ها به‌دست می‌آید. تابع ترفتز برای پاسخ بخش همگن به‌کار می‌رود و اثر چگونگی انتخاب جمله‌های این تابع در دقت پاسخ‌های خیز و لنگر، هدف اصلی این مقاله است. برای انجام این پژوهش، دو خانوادهٔ جزء با دو آرایش درجهٔ آزادی متفاوت و پس از حذف گونه‌های ناشایسته انتخاب می‌شوند. باید دانست، برای هر یک از آرایش درجه‌های آزادی و چیدمان گره‌ها روی جزء، می‌توان تابع میدان‌های متفاوتی را به‌کار برد که این ویژگی در پژوهش کارکن [۱] وجود ندارد. هر یک از این تابع‌ها، با نگهداری تقارن جمله‌ها و حذف شماری از جمله‌های ترفتز به‌دست می‌آیند. در مجموع، ٦٧٤ جزء صفحهٔ خمشی جدید در این مقاله بررسی شده‌اند. از این میان، ده جزء که پاسخ‌های برتری دارند معرفی خواهند شد. چهار جزء از خانوادهٔ نخست آرایش درجهٔ آزادی و شش جزء از خانوادهٔ دوم انتخاب می‌شوند و شمار زیادی آزمون عددی برروی آنها انجام می‌گیرد. از مقایسهٔ جزءهای ناقص پیشنهادی با دو جزء کامل، می‌توان دریافت، که برخلاف تصور معمول، کامل بودن تابع‌های انتخابی شرط لازم برای دست‌یابی به دقت بالا نمی‌باشد. به سخن دیگر، درصورت انتخاب درست تابع‌های ناقص ترفتز، می‌توان به جزءهای با شمار درجهٔ آزادی کمتر و مرتبهٔ بالاتر دست یافت که نسبت به جزءهای کامل پیشینیان کاراترند. این یافته برتری جزءهای ناقص پیشنهادی را نسبت به پژوهش کارکن و اختری، که دارای تابع‌های میدان کامل‌اند، نشان می‌دهد [۱،۲٦]. این مقاله آشکار خواهد کرد، چون تابع میدان معادلهٔ ایستایی را برقرار می‌کند، پاسخ‌های نیرویی بیشتر جزءها، دقت بیشتری نسبت به تغییرمکان‌ها دارند.

معادلهٔ ایستایی صفحهٔ کیرشهف

همان‌گونه که آمد، تابع‌های ترفتز درحقیقت پاسخ‌های معادلهٔ ایستایی هستند. معادلهٔ دیفرانسیل صفحهٔ خمشی مرتبهٔ چهار و به سیمای زیر می‌باشد:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D} \quad , \quad D = \frac{Et^3}{12(1-v^2)} \qquad (۱)$$

در اینجا، ∇ کارگر نابلا، w تابع میدان تغییرمکان جزء، p(x,y) تابع بار و D سفتی صفحه می‌باشد. همانند معادلهٔ زیر، تابع میدان جزء دارای دو بخش است:

$$w = w_p + w_c = w_p + \sum_{j=1}^{m} w_j c_j = w_p + \left[w_c\right]\{c\} \quad (۲)$$

در این برابری، w_c و w_p و m، بـه‌ترتیـب، پاسـخ بخش همگن، پاسخ خصوصی معادلهٔ ایستایی صفحه و شمار مجهول‌های گرهی می‌باشند. همچنین، $\{c\}$ بردار ضریب‌های مجهول نـام دارد. بـا حـل تحلیلـی معادلـهٔ حاکم در مختصه‌های قطبی و تبـدیل بـه مختصـه‌هـای دکارتی، پاسخ همگن به‌صورت تابع‌های ترفتز زیـر در دسترس قرار می‌گیرد [۱,25]:

$$\begin{cases} w_{k+1} = r^2 \operatorname{Re}(z^k) \\ w_{k+2} = r^2 \operatorname{Im}(z^k) \\ w_{k+3} = \operatorname{Re}(z^{k+2}) \\ w_{k+4} = \operatorname{Im}(z^{k+2}) \end{cases} , \quad k = 0,1,2,... \quad (۳)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad z = x + iy \quad (٤)$$

پاسخ‌های خصوصی برای بارگذاری‌هـای متفـاوت در بخش آزمون‌های عددی ارائه خواهد شد. همچنـین، جمله‌های تابع ترفتز بـرای دسـته‌هـای بـا شـمارهٔ k در پیوست مقاله آمده است. یکی از ویژگی‌های تـابع‌هـای ترفتز، افزون بر برقرار کردن معادلهٔ لاپلاس، کامل بودن آنها است. به سخن دیگر، تـابع‌هـای ترفتـز بـه‌گونـه‌ای هستند که تمامی پاسخ‌های ممکن را به‌صورت دسته‌ای از پاسخ‌ها دارند. ازایـن‌رو، در تـابع ترفتـز جملـه‌هـای $1, r\cos\theta, r\sin\theta, ..., r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta$ در دسـتگاه مختصه‌های قطبی به‌کار گرفته شده‌اند. معادلـهٔ لاپـلاس نخست در دستگاه مختصه‌های قطبی حـل مـی‌شـود و پس از آن، پاسـخ‌هـا بـه مختصـه‌هـای دکـارتی منتقـل خواهند شد.

رابطه‌سازی جزء صفحهٔ خمشی

با داشتن تابع‌های ترفتز، می‌توان رابطه‌های جزء محدود را نوشت. پس از انتخاب تابع میدان، رابطه‌هـای بـردار کرنش و جابه‌جایی جزء به‌دست می‌آیند [27,۱]:

$$\varepsilon = z(\tilde{\varepsilon} + B_q\{c\}) \quad , \quad u = \tilde{u} + N_q\{c\} \quad (۵)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \left[-\frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y} \right]^T$$
$$B_q = \left[-\frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w_c}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w_c}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (٦)$$

$$\tilde{u} = \left[w_p, -\frac{\partial w_p}{\partial x}, \frac{\partial w_p}{\partial y} \right]^T$$
$$N_q = \left[w_c, -\frac{\partial w_c}{\partial x}, \frac{\partial w_c}{\partial y} \right]^T \quad (٧)$$

با جایگذاری مختصه‌های گـره‌هـا در مـاتریس N_q، تغییرمکان‌های گرهی به‌صورت زیـر در دسـترس قـرار می‌گیرند:

$$D = \tilde{D} + \hat{G}_q\{c\}, \hat{D} = \hat{G}_q\{c\}$$
$$\{c\} = \hat{G}_q^{-1}\hat{D} \quad (٨)$$

از سوی دیگر، با قرار دادن $\{c\}$ در بردارهای کرنش و جابه‌جایی‌های گرهی، معادله‌های زیر نتیجه می‌شوند:

$$u = \tilde{u} + N_q\{c\} = \tilde{u} + N_q\hat{G}_q^{-1}\hat{D}$$
$$\hat{N} = N_q\hat{G}_q^{-1} \quad (۹)$$

$$\varepsilon = z(\tilde{\varepsilon} + B_q\{c\}) = z(\tilde{\varepsilon} + B_q\hat{G}_q^{-1}\hat{D})$$
$$\hat{B} = B_q\hat{G}_q^{-1} \quad (۱۰)$$

بر این پایه، تـابعی کارمایـهٔ نهفتـه (تـابعی انـرژی پتانسیل) برحسب ماتریس کشسـانی D_m بـرروی میـان صفحهٔ Ω به‌صورت زیر برپا می‌گردد:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega (\tilde{\varepsilon} + B_q\{c\})^T.D_m.(\tilde{\varepsilon} + B_q\{c\}).d\Omega - \int_\Omega u^T.F.d\Omega \quad (۱۱)$$

$$D_m = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

برای یافتن پاسخ، کارمایهٔ نهفته باید کمینه گردد. با قرار دادن رابطه‌های (۹ و ۱۰) در تابعی کارمایهٔ نهفته و تابع‌نخستین‌گیری نسبت به تغییرمکان‌های گرهی، رابطهٔ زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \hat{D}} = 0 \qquad (۱۲)$$

$$\left(\int_\Omega \hat{B}^T.D_m.\hat{B}\ d\Omega\right)\hat{D} = \int_\Omega \hat{N}^T.F\ d\Omega - \int_\Omega \hat{B}^T.D_m.\tilde{\varepsilon}\ d\Omega \qquad (۱۳)$$

سرانجام، ماتریس سختی K و بردار بارهای گرهی P به‌دست می‌آیند:

$$K = \int_\Omega \hat{B}^T.\ D_m.\ \hat{B}\ d\Omega \qquad (۱٤)$$

$$P = \int_\Omega (\hat{N}^T.\ F - \hat{B}^T.\ D_m.\ \tilde{\varepsilon})d\Omega \qquad (۱٥)$$

آرایش درجه‌های آزادی جزء‌های ناقص

در نخستین گام این پژوهش، گزینش آرایش درجه‌های آزادی و گره‌ها برای آفرینش جزئی نو انجام می‌پذیرد. پژوهشگران آشکار ساخته‌اند که فقط انتخاب یک تابع با درجهٔ بالا و شماری نقطهٔ گرهی و درجهٔ آزادی کافی نیستند و باید این کارها با هوشیاری ویژه‌ای انجام پذیرند. افزون بر آن، درجه‌های آزادی را باید مناسب با جایگاه هر گره برگزید. ازاین‌رو، زمانی که پاره‌ای عبارت‌ها از دسته‌های تابع ترفتز به دلایلی انتخاب نشوند، آن جزء ناقص نامیده می‌شود. نتیجه‌های پژوهش اختری به‌شرح زیر می‌باشند [۲٦]:

۱– انتخاب شمار زیاد نقطهٔ گرهی، برای رسیدن به پاسخ مناسب کافی نیست.

۲– انتخاب درست درجه‌های آزادی برای گره‌ها نسبت به گزینش جایگاه گره‌ها از اهمیت بیشتری برخوردار است. باید دانست، شمار کمتر نقطهٔ گرهی با درجه‌های آزادی مناسب از تعداد بیشتر نقطهٔ گرهی دارای درجهٔ آزادی نامناسب، پاسخ‌های بهتری به‌دست می‌دهد.

۳– زیاد بودن شمار گره‌ها بر پهلوی جزء همیشه مناسب نخواهد بود و به‌سبب محدود کردن گزینش درجه‌های آزادی جزء، دقت خوبی نخواهد داشت.

٤– برای داشتن درجهٔ آزادی دورانی در گره‌های گوشه باید از $\frac{\partial w}{\partial x}$ و $\frac{\partial w}{\partial y}$ بهره جست و از کاربرد $\frac{\partial w}{\partial t}$ و $\frac{\partial w}{\partial n}$ پرهیز کرد. زیرا، این درجه‌ها به امتداد پهلوی هر جزء وابسته می‌باشند و در گره‌های گوشه تعریف یکتایی ندارند. در گره‌های گوشه درجه‌های آزادی w، $\frac{\partial w}{\partial x}$ و $\frac{\partial w}{\partial y}$ به‌طور معمول کاربرد دارند و همیشه مناسبند.

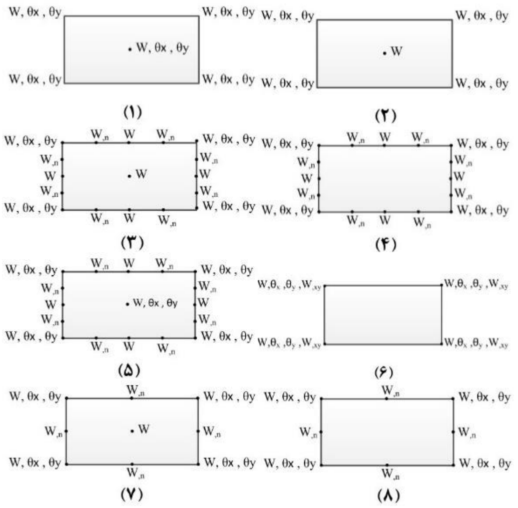
٥– برای گره‌های میان‌پهلویی، انتخاب درجه‌های آزادی $\frac{\partial w}{\partial t}$ و $\frac{\partial w}{\partial n}$ مفیدتر از گزینش درجه‌های آزادی $\frac{\partial w}{\partial x}$ و $\frac{\partial w}{\partial y}$ می‌باشد و پاسخ‌های بهتری به‌دست می‌آید.

٦– برای گره‌های میان‌پهلویی، درجهٔ آزادی $\frac{\partial w}{\partial n}$ مفیدتر از سایر درجه‌های آزادی می‌باشد. بااین‌حال، وجود شمار زیاد این درجهٔ آزادی در جزء سبب افت دقت می‌شود و برای دسترسی به پاسخ مناسب باید تعداد آن محدود باشد.

۷- برای گره‌های میان‌پهلویی درجهٔ آزادی w به‌تنهایی مفید نیست ولی ترکیب دو درجهٔ آزادی w و $\frac{\partial w}{\partial n}$ در این گره‌ها دارای نتیجه‌های بهتری می‌باشد.

۸- برای دسترسی به ترکیب مناسب درجه‌های آزادی w و $\frac{\partial w}{\partial n}$، باید در هر پهلو، افزون بر گره گوشه، سه گره میان‌پهلو نیز گزینش شود. در گره میانی، از درجهٔ آزادی w، و در دو گره دیگر باید از $\frac{\partial w}{\partial n}$ بهره جست. تاکنون، این نوع انتخاب درجهٔ آزادی بهترین نتیجه را داشته است.

برای آفرینش جزءهای نو، آرایش درجه‌های آزادی باتوجه به نتیجه‌های پژوهش اختری انجام می‌پذیرد [۲۶]. خاطرنشان می‌شود، حفظ تقارن در چینش درجه‌های آزادی نسبت به نکته‌های این بخش، در اولویت قرار دارند. شکل (۱) هشت آرایش برگزیده را نمایش می‌دهد. از میان آنها، آرایش‌های ۷ و ۸ نتیجه‌های مناسب دارند که پاسخ‌های آنها در بخش آزمون‌های عددی می‌آیند. سایر آرایش‌ها به‌دلیل نتیجهٔ نامطلوب حذف می‌شوند. پاسخ‌های نیرویی با خطای زیاد یا هم‌گرا به عدد نادرست و تغییرمکان‌های با خطای نامطلوب از دلیل‌های نامناسب دانستن جزءهای حذفی می‌باشند. باید افزود، در تمام آرایش‌های حذفی، شمار درجه‌های آزادی و گره‌ها خیلی کم یا خیلی زیاد بودند. برپایهٔ تجربه‌های عددی، همیشه شمار زیاد گره و درجهٔ آزادی تضمین‌کنندهٔ دقت بالا در جزء نخواهد بود. باید افزود، آرایش‌های ۷ و ۸ نسبت به آرایش‌های دیگر از دیدگاه شمار گره و درجهٔ آزادی در یک وضعیت میانه قرار دارند. برخلاف تصور همگان، واکاوی‌های این مقاله نشان خواهد داد که تنها شمار درجه‌های آزادی ملاک نمی‌باشد، بلکه جایگاه گره‌ها و درجه‌های آزادی و گونهٔ آنها از اهمیت بیشتری برخوردارند.



شکل ۱ آرایش‌های درجهٔ آزادی جزءهای ناقص

با مقدار دادن به k در رابطهٔ (۳)، سی و یک جملهٔ نخست پاسخ همگن برپایهٔ پیوست یکم در جدول (۱۸) می‌آیند. باید افزود، در روش ترفتز، شمار جمله‌های انتخابی تابع ترفتز از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید [۱, 14]:

$$m_T \geq N_{DOF} - m_{RIG} \qquad (۱۶)$$

در اینجا، N_{DOF} شمار درجهٔ آزادی، m_{RIG} تعداد حرکت‌های جسم سخت و m_T شمار جمله‌های انتخابی ترفتز می‌باشد. در شیوهٔ ترفتز، شرط‌های پیوستگی توسط تابع‌های مرزی تأمین خواهد شد و وجود حرکت‌های جسم سخت در تابع میدان درونی باعث پیدایش حالت‌های صفر و نادرست کارمایهٔ کرنشی و کمبود رتبهٔ ماتریس سختی می‌شود. به‌همین دلیل، در روش ترفتز جمله‌های حرکت جسم سخت از تابع میدان درونی جسم حذف می‌گردند. در این پژوهش، به‌دلیل نبود تابع مرزی و برای برقرار ساختن شرط‌های پیوستگی، جمله‌های حرکت جسم سخت (1,x,y) در تابع میدان به‌کار می‌روند. شمار جمله‌هایی که از جدول باید گزینش شوند از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$m_T = N_{DOF} - m_{RIG} \qquad (۱۷)$$

در گزینش جمله‌های تابع ترفتز برای جزءهای ناقص، عبارت‌های پیاپی و کامل هر دستهٔ ترفتز برای تابع خیز به‌کار نمی‌روند. باوجود این، کوشش بر حفظ تقارن مرتبهٔ تابع میدان نسبت به x و y خواهد بود. سرانجام، برای هر کدام از هشت شکل آرایش درجهٔ آزادی، شماری جزء با تابع‌های میدان متفاوت پیشنهاد می‌شوند. درمجموع، برای این آرایش‌های هشت‌گانه ٦٧٤ عدد تابع میدان متفاوت گزینش خواهد شد. از میان اینها، ۲۲۷ جزء ماتریس هندسی ویژه دارند و حذف می‌شوند. از ٤٤٧ جزء باقی‌مانده، در گام نخست، ٦٧ جزء با دقت بهتر انتخاب می‌گردند. پس از انجام آزمون‌های عددی فراوان، ده جزء دارای پاسخ‌های برتر با آرایش تابع میدان جدول (۱) معرفی خواهند شد. از این ده جزء، چهار عدد ۱۷ درجهٔ آزادی دارند و مانند شکل (۱–۷) و با نام‌های ICTF-17-1 تا ICTF-17-4 می‌باشند. شش جزء دیگر، آرایش ١٦ درجهٔ آزادی را همانند شکل (۱–۸) دارند و با ICTF-16-1 تا ICTF-16-6 نام‌گذاری شده‌اند. به کوتاه سخن، ده جزء که پاسخ‌های برتر دارند در این پژوهش معرفی می‌گردند.

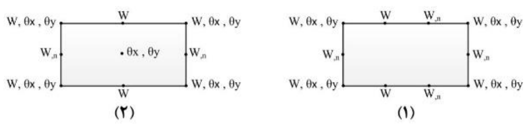
جدول ۱ آرایش جمله‌های تابع میدان جزءهای ناقص

نام جزء	آرایش جمله‌های تابع میدان
ICTF-16-1	[۱ ۲ ۳ ٦ ۷ ۱۱ ۱۳ ۱٤ ۱۹ ۲۱ ۲۲ ۲۵ ۲٦]
ICTF-16-2	[۱ ۲ ۳ ٦ ۷ ۱۱ ۱۳ ۱٤ ۱۹ ۲۱ ۲۲ ۲۵ ۲۷]
ICTF-16-3	[۱ ۲ ۳ ٦ ۷ ۱۰ ۱۳ ۱٤ ۱۸ ۲۱ ۲۲ ۲۵ ۲٦]
ICTF-16-4	[۱ ۲ ۳ ٦ ۷ ۹ ۱۰ ۱٤ ۱۵ ۱۸ ۱۹ ۲۱ ۲۲]
ICTF-16-5	[۱ ۲ ۳ ٦ ۷ ۱۰ ۱۳ ۱٤ ۱۸ ۲۱ ۲۲ ۲۵ ۲۷]
ICTF-16-6	[۱ ۲ ۳ ٦ ۷ ۱۰ ۱٤ ۱۵ ۱۸ ۲۱ ۲۲ ۲۵ ۲۷]
ICTF-17-1	[۱ ۲ ۳ ٦ ۷ ۹ ۱۰ ۱٤ ۱۵ ۱۷ ۱۹ ۲۱ ۲۲ ۲۷]
ICTF-17-2	[۱ ۲ ۳ ٦ ۷ ۹ ۱۱ ۱٤ ۱۵ ۱۷ ۱۹ ۲۱ ۲۲ ۲۷]
ICTF-17-3	[۱ ۲ ۳ ٦ ۷ ۹ ۱۰ ۱٤ ۱۵ ۱٦ ۱۸ ۲۱ ۲۲ ۲۷]
ICTF-17-4	[۱ ۲ ۳ ٦ ۷ ۱۰ ۱٤ ۱۵ ۱۷ ۲۱ ۲۲ ۲۷ ۲۹ ۳۰]

برای ارزیابی توانایی جزءهای پیشنهادی در یافتن مقدار دقیق تنش و کرنش ثابت، آزمون وصله انجام می‌پذیرد. در این آزمون، جزءهای نویسندگان پاسخ‌های دقیق را به‌دست می‌دهند. به سخن دیگر، جزءهای پیشنهادی به‌سادگی آزمون‌های وصله را می‌گذرانند.

جزءهای کامل

در این بخش، به آفرینش یک جزء نو با تابع میدان کامل پرداخته می‌شود. هدف از این کار، بررسی اثر کامل بودن تابع میدان ایجادشده درمقایسه با جزءهای ناقص است. جمله‌های تابع میدان از دسته‌های پیاپی تابع ترفتز انتخاب خواهند شد و تمامی عبارت‌های هر دسته را باتوجه به شمار درجه‌های آزادی دربر می‌گیرد. پس از آن، برمبنای تابع میدان تشکیل‌شده و شمار جمله‌ها، آرایش درجه‌های آزادی جزء به‌دست می‌آید. تابع میدان جزء کامل پیشنهادی از مرتبهٔ ۵ می‌باشد که ۱۵ عبارت نخست از تابع‌های ترفتز (چهار دستهٔ نخست پیوست یکم) را دربر می‌گیرد و با سه حرکت جسم سخت، شمار درجه‌های آزادی ۱۸ می‌شود. شکل (۲–۱) و (۲–۲)، دو آرایش درجه‌های آزادی برگزیده‌شده برای جزءهای، به‌ترتیب، CTF-18-1 و CTF-18-2 را نشان می‌دهد. باید دانست، نام‌گذاری جزءهای ICTF و CTF برگرفته از عبارت‌های "Incomplete Trefftz Function" و "Complete Trefftz Function" می‌باشند.



شکل ۲ آرایش‌های درجهٔ آزادی جزءهای کامل

خاطرنشان می‌شود، در جزءهای کامل، انتخاب آرایش درجهٔ آزادی وابسته به شمار جمله‌های تابع میدان است. درحالی‌که، تابع میدان جزءهای ناقص پس از انتخاب آرایش‌های درجهٔ آزادی برپایهٔ معیارهای

درجه‌های آزادی برتر، به‌دست می‌آید. ازاین‌رو، پس از آزمودن آرایش‌های ممکن، گونه‌هایی که ماتریس هندسی ویژه و کمبود رتبه دارند حذف می‌شوند. از میان آنها، دو آرایش شکل (۲) درنهایت انتخاب شده‌اند.

آزمون‌های عددی

در این بخش، حل چند نمونهٔ عددی برای راستی‌آزمایی جزءهای پیشنهادی می‌آید. با بارگذاری‌های متقارن و نامتقارن، مانند بار گستردهٔ یکنواخت، بار متمرکز، بار سینوسی و بار مثلثی، آزمون‌های گوناگونی انجام می‌پذیرد. گونه‌های متفاوت شرط‌های تکیه‌گاهی مانند تکیه‌گاه‌های گیرداری، ساده، لبهٔ آزاد و ستون در گوشه‌ها به‌صورت متقارن و نامتقارن به‌کار می‌روند. باید دانست، پاسخ‌های خصوصی جدول (۲) فقط به بارگذاری جزء بستگی دارد و شرط‌های تکیه‌گاهی برروی آنها بی‌اثر می‌باشد. در آزمون‌هایی که نسبت پواسون ذکر نشده است برابر با ۰/۳می باشد. خاطرنشان می‌شود، پاسخ‌های دقیق مسئله‌ها در دست هستند [27]. باید افزود، در حالت تکیه‌گاه‌های تمام‌گیردار و تمام‌ساده، پاسخ‌ها برای بار گسترده با نتیجهٔ جزءهای DKQ[28,13] (جزء چهارپهلوی صفحهٔ کیرشهف ناپیوسته)، ARS-T9[29] (جزء سه‌پهلو با ۹ درجهٔ آزادی برپایهٔ نگرهٔ رایزنر-میندلین) و ARS-Q12[2] (جزء چهارپهلو با ۱۲ درجهٔ آزادی برپایهٔ نگرهٔ میندلین- رایزنر) و همچنین، برای بارگذاری متمرکز گرهی با جزءهای DKQ[13,28]، ACM[30] (جزء چهارپهلوی ناسازگار صفحهٔ کیرشهف با ۱۲ درجهٔ آزادی) و RGC-12[30] (جزء چهارپهلوی سازگار صفحهٔ خمشی نازک با ۱۲ درجهٔ آزادی) مقایسه خواهند شد. باید افزود، در تمامی آزمون‌ها خیز و لنگر بی‌بعد و مستقل از اندازهٔ شدت بار و بعدهای صفحه هستند.

صفحهٔ مربعی با بار گستردهٔ یکنواخت

در نخستین آزمون، صفحه‌ای مربعی با پهلوی a زیر اثر بار گستردهٔ یکنواخت q، با شرط‌های تکیه‌گاهی متفاوت تحلیل می‌گردد. نتیجهٔ جابه‌جایی و لنگر مرکز صفحهٔ مربعی (a=b) برای جزءهای پیشنهادی در حالت‌های گوناگون در جدول‌های (۳ و ٤) آمده‌اند. همچنین، شکل‌های (۵-۳)، نمودارهای هم‌گرایی خیز و لنگرها برای حالت یک‌لبه‌گیردار و سه‌لبه‌ساده را نشان می‌دهند.

جدول ۲ پاسخ‌های خصوصی صفحهٔ مستطیلی با بارگذاری‌های متفاوت

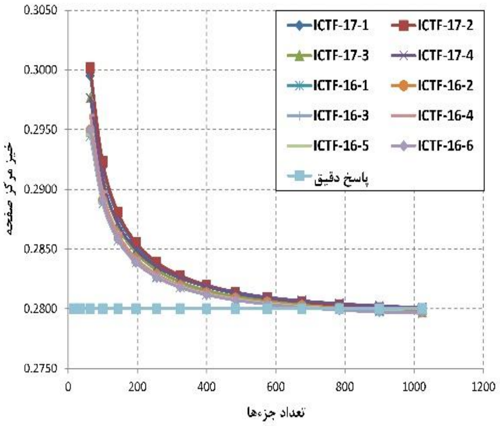
پاسخ خصوصی معادلهٔ ایستایی	بارگذاری
$W_p = \frac{q}{64D}(x^2+y^2)^2$	بار گستردهٔ یکنواخت با شدت q
$W_p = \frac{q}{64D} r_p^2 Ln(r_p^2) \quad r_p^2 = (x-x_p)^2 + (y-y_p)^2$	بار متمرکز P با محل اثر (x_p , y_p) در صفحه
$W_p = (q_0 \Big/ \pi^4 D(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}))\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{\pi y}{b})$	بار سینوسی روی صفحهٔ مستطیلی به بعدهای a و b
$W_p = \frac{q_0}{192aD} x(x^2+y^2)^2$	بار مثلثی روی صفحهٔ مربعی با طول پهلوی a

جدول ۳ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده زیر اثر بار گستردهٔ یکنواخت $(w_c/(qa^4/100D))$

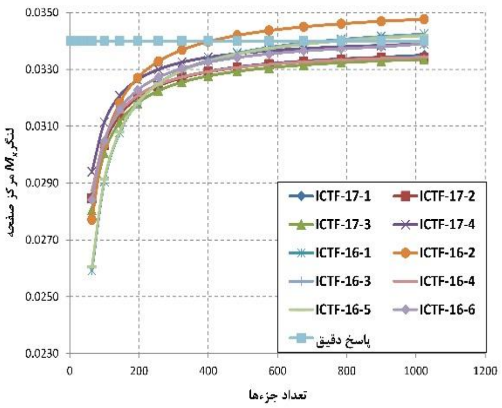
شبکه	۸*۸	۱۶*۱۶	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۴۴۵۸	۰/۴۱۶۱	۰/۴۰۸۵
ICTF-17-2	۰/۴۴۶۱	۰/۴۱۶۲	۰/۴۰۸۶
ICTF-17-3	۰/۴۴۶۷	۰/۴۱۶۷	۰/۴۰۹۰
ICTF-17-4	۰/۴۴۴۴	۰/۴۱۵۸	۰/۴۰۸۶
ICTF-16-1	۰/۴۴۳۷	۰/۴۱۵۷	۰/۴۰۸۷
ICTF-16-2	۰/۴۴۴۰	۰/۴۱۵۹	۰/۴۰۸۸
ICTF-16-3	۰/۴۴۳۷	۰/۴۱۵۷	۰/۴۰۸۷
ICTF-16-4	۰/۴۴۳۷	۰/۴۱۵۶	۰/۴۰۸۶
ICTF-16-5	۰/۴۴۳۸	۰/۴۱۵۷	۰/۴۰۸۷
ICTF-16-6	۰/۴۴۲۹	۰/۴۱۵۴	۰/۴۰۸۴
DKQ	۰/۴۰۶۰	۰/۴۰۶۲	۰/۴۰۶۲
ARS-T9	۰/۳۹۷۳	۰/۴۰۴۱	۰/۴۰۵۷
ARS-Q12	۰/۴۰۶۰	۰/۴۰۶۲	۰/۴۰۶۲
پاسخ دقیق	۰/۴۰۶۲		

جدول ۴ لنگر در مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه ساده زیر اثر بار گستردهٔ یکنواخت $(M_c/(qa^2/10))$

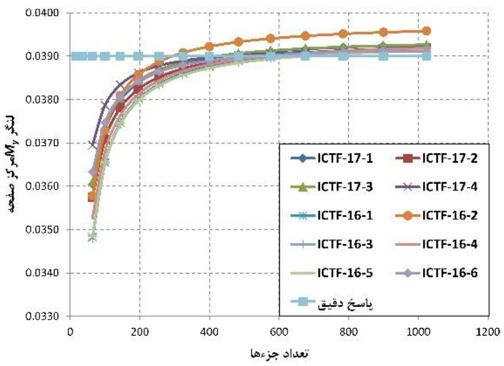
شبکه	۸*۸	۱۶*۱۶	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۰۴۵۵	۰/۰۴۷۵	۰/۰۴۷۹
ICTF-17-2	۰/۰۴۵۵	۰/۰۴۵۷	۰/۰۴۷۹
ICTF-17-3	۰/۰۴۶۳	۰/۰۴۷۴	۰/۰۴۷۷
ICTF-17-4	۰/۰۴۵۱	۰/۰۴۷۳	۰/۰۴۷۹
ICTF-16-1	۰/۰۴۴۷	۰/۰۴۷۳	۰/۰۴۷۹
ICTF-16-2	۰/۰۴۵۵	۰/۰۴۷۸	۰/۰۴۸۴
ICTF-16-3	۰/۰۴۴۵	۰/۰۴۷۲	۰/۰۴۷۹
ICTF-16-4	۰/۰۴۴۶	۰/۰۴۷۲	۰/۰۴۷۹
ICTF-16-5	۰/۰۴۴۶	۰/۰۴۷۲	۰/۰۴۷۹
ICTF-16-6	۰/۰۴۵۷	۰/۰۴۷۴	۰/۰۴۷۸
DKQ	۰/۰۴۸۴	۰/۰۴۸۰	۰/۰۴۷۹
ARS-T9	۰/۰۴۸۲	۰/۰۴۸۰	۰/۰۴۷۹
ARS-Q12	۰/۰۴۸۴	۰/۰۴۸۰	۰/۰۴۷۹
پاسخ دقیق	۰/۰۴۷۹		



شکل ۳ هم‌گرایی خیز مرکز صفحهٔ مربعی با یک تکیه‌گاه گیردار و سه تکیه‌گاه ساده و بار گسترده یکنواخت $(w_c/(qa^4/100D))$



شکل ۴ هم‌گرایی لنگر M_x در مرکز صفحهٔ مربعی با یک تکیه‌گاه گیردار و سه تکیه‌گاه ساده و بار گسترده یکنواخت $(M_c/(qa^2/10))$



شکل ۵ هم‌گرایی لنگر M_y مرکز صفحهٔ مربعی با یک تکیه‌گاه گیردار و سه تکیه‌گاه ساده و بار گستردهٔ یکنواخت $(M_c/(qa^2/10))$

نتیجهٔ جدول‌های (۳ و ٤)، برتری جزءهای پیشنهادی را نشان می‌دهند. آشکار است، جزءهای ICTF با شبکهٔ ١٦*١٦ هم پاسخ‌های بسیار قابل‌قبولی ارائه می‌دهند که این ویژگی را جزءهای DKQ[28,13]، ARS-T9[29] و ARS-T12[2] ندارند. از سوی دیگر، با مقایسهٔ دوبه‌دوی آرایش جزءهای ICTF-16-1 و ICTF-16-2 و همچنین ICTF-16-3 و ICTF-16-5، ICTF-16-1 و ICTF-16-3، ICTF-16-2 و ICTF-16-5 که دوبه‌دوی آنها فقط در یک عبارت از دستهٔ زوج تفاوت دارند، می‌توان دریافت که عبارت‌های دربرگیرندهٔ جمله‌های x^n و y^n پاسخ‌های سخت‌تری دارند. همچنین، این اثرها با بالا رفتن مرتبه افزایش می‌یابند.

جدول ٥ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های گیردار زیر اثر بار متمرکز میانی $(w_c/(pa^2/100D))$

شبکه	۸*۸	١٦*١٦	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۵۵۴۴	۰/۵۵۹۰	۰/۵٦۰۵
ICTF-17-2	۰/۵٥٤۷	۰/۵۵۹۳	۰/۵٦۰٦
ICTF-17-3	۰/٥٤٥۷	۰/۵٥٦٤	۰/۵٦۰۰
ICTF-17-4	۰/۵۵۳۹	۰/۵۵۹٦	۰/۵٦١۵
ICTF-16-1	۰/۵۳۷۹	۰/٥٥٤٤	۰/۵۵۹۲
ICTF-16-2	۰/٥٤١۰	۰/۵۵۵۵	۰/۵۵۹۷
ICTF-16-3	۰/۵۳٦۵	۰/٥٥٤١	۰/۵۵۹۲
ICTF-16-4	۰/۵۳۸٤	۰/٥٥٤۳	۰/۵۵۹۹
ICTF-16-5	۰/۵۳۹۳	۰/٥٥٤۸	۰/۵۵۹۵
ICTF-16-6	۰/۵۳۳۵	۰/۵۵۲۷	۰/۵۵۹۰
DKQ	۰/۵۸۹۵	–	–
ACM	۰/۵۸۰۳	۰/۵٦۷۲	–
RGC-12	۰/۵۵۵۰	۰/۵۵۹٦	–
پاسخ دقیق	۰/۵٦۰۵		

جدول ٦ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده زیر اثر بار متمرکز میانی $(w_c/(pa^2/10D))$

شبکه	۸*۸	١٦*١٦	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/١١۵۴	۰/١١۵۸	۰/١١٦۰
ICTF-17-2	۰/١١۵۵	۰/١١۵۸	۰/١١٦۰
ICTF-17-3	۰/١١٤٦	۰/١١۵٦	۰/١١۵۹
ICTF-17-4	۰/١١۵۷	۰/١١٦۰	۰/١١٦١
ICTF-16-1	۰/١١٤۰	۰/١١۵٤	۰/١١۵۹
ICTF-16-2	۰/١١٤۲	۰/١١۵۵	۰/١١۵۹
ICTF-16-3	۰/١١۳۸	۰/١١۵٤	۰/١١۵۹
ICTF-16-4	۰/١١۳۹	۰/١١۵٤	۰/١١۵۹
ICTF-16-5	۰/١١٤١	۰/١١۵٤	۰/١١۵۹
ICTF-16-6	۰/١١۳۵	۰/١١۵۲	۰/١١۵۹
DKQ	۰/١١۹٤	–	–
ACM	۰/١١۸۳	۰/١١٦۷	–
RGC-12	۰/١١۵۵	۰/١١۵۹	–
پاسخ دقیق	۰/١١٦۰		

صفحهٔ مربعی با بار متمرکز میانی

در این بخش، سازهٔ آزمون پیشین برای بار متمرکز P در مرکز صفحه واکاوی می‌شود. تمام تکیه‌گاه‌های صفحه گیردار و یا ساده می‌باشند. جدول‌های (۵ و ٦) پاسخ‌های خیز در مرکز صفحه را در دسترس قرار می‌دهند. باید دانست، لنگر در مرکز سازه و در نقطهٔ محل اثر بار متمرکز به بی‌نهایت میل می‌کند و قابل محاسبه نیست.

همانند مثال پیشین با بار گسترده، در حالت بارگذاری متمرکز نیز، جزءهای پیشنهادی از جزءهای DKQ[13,28]، ACM[30] و RGC-12[30] توانـاتر بودند. همان‌گونه که پیش از این اشاره شد، جزءهای ICTF-16-3 و ICTF-16-5 در انتخاب عبارت‌های دستهٔ ٦ متفاوت هستند. همچنین، آرایش جزءهای ICTF-17-1 و ICTF-17-2، تفاوتی مشابه در عبارت‌های انتخابی دستهٔ ۲ دارند. با بررسی دو جزء ICTF-17-1 و ICTF-17-2 ، آشکار می‌شود که به‌دلیل

اختلاف در دستهٔ مرتبهٔ پایین، پاسخ‌ها تفاوت چندانی ندارند. از سوی دیگر، این اثر در مقایسهٔ جزءهای ICTF-16-3 و ICTF-16-5، که تفاوت در عبارت‌های دستهٔ مرتبهٔ بالا دارند، بیشتر دیده می‌شود.

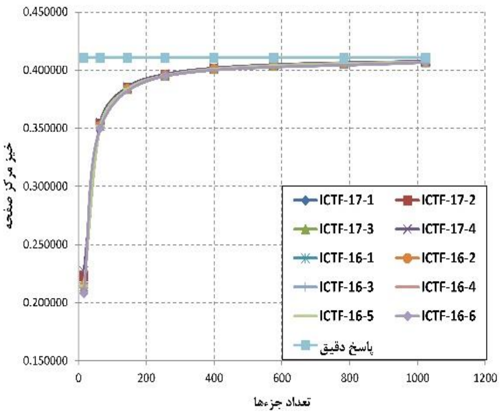
جدول ۷ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های گیردار زیر اثر بار سینوسی دوطرفه ($(w_c/(q_0a^4/100D))$)

شبکه	۸*۸	۱۶*۱۶	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۰۹۰۵	۰/۰۹۱۱	۰/۰۹۱۴
ICTF-17-2	۰/۰۹۰۶	۰/۰۹۱۲	۰/۰۹۱۴
ICTF-17-3	۰/۰۸۹۴	۰/۰۹۰۸	۰/۰۹۱۲
ICTF-17-4	۰/۰۹۰۲	۰/۰۹۱۲	۰/۰۹۱۴
ICTF-16-1	۰/۰۸۸۶	۰/۰۹۰۷	۰/۰۹۱۲
ICTF-16-2	۰/۰۸۸۹	۰/۰۹۰۷	۰/۰۹۱۲
ICTF-16-3	۰/۰۸۸۶	۰/۰۹۰۷	۰/۰۹۱۲
ICTF-16-4	۰/۰۸۸۷	۰/۰۹۰۷	۰/۰۹۱۲
ICTF-16-5	۰/۰۸۸۸	۰/۰۹۰۷	۰/۰۹۱۲
ICTF-16-6	۰/۰۸۷۹	۰/۰۹۰۵	۰/۰۹۱۱
پاسخ دقیق	۰/۰۹۱۳		

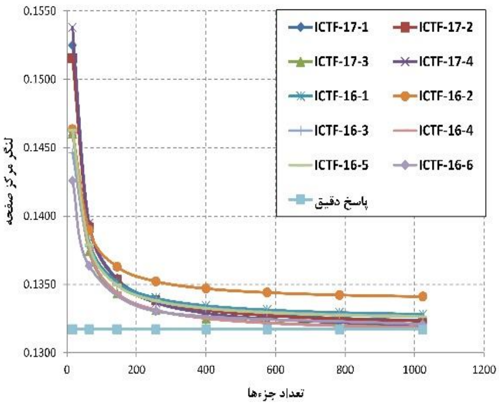
صفحهٔ مربعی با بار سینوسی دوطرفه

در این آزمون، یک صفحهٔ مربعی با پهلوی a زیر اثر بار سینوسی دوطرفه، $q = q_0 \sin(\pi x / a)\sin(\pi y / b)$، با دو حالت تکیه‌گاهی ساده و گیردار تحلیل می‌گردد. نتیجهٔ جابه‌جایی مرکز صفحهٔ مربعی (a=b) برای جزءهای پیشنهادی در جدول (۷) درج شده‌اند. از سوی دیگر، نمودارهای هم‌گرایی خیز و لنگر برای صفحهٔ تکیه‌گاه‌های ساده، در شکل‌های (۶ و ۷) نمایان می‌باشد. نسبت پواسون نیز، برابر با ۰/۲ است.

پس از حل چندین مسئله و بررسی آرایش جزءها، بهتر است که جمله‌های تابع خیز از دسته‌های با شمارهٔ فرد هم‌وزن باشند. چون در دسته‌های فرد هر عبارت به‌تنهایی متقارن نیست، انتخاب دو عبارت بهتر خواهد بود، به‌گونه‌ای که تمامی جمله‌ها از آن مرتبه را دربرگیرد.



شکل ۶ هم‌گرایی خیز در مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه ساده زیر اثر بار سینوسی دوطرفه

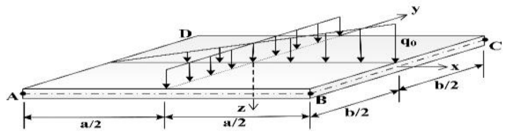


شکل ۷ هم‌گرایی لنگر در مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه ساده زیر اثر بار سینوسی دوطرفه

صفحهٔ مربعی زیر اثر فشار مثلثی

این بار، صفحهٔ مربعی با پهلوی a زیر اثر فشار مثلثی $q = q_0 x / a$، با تکیه‌گاه‌های متقارن تمام‌ساده و همچنین نامتقارن یک‌لبه‌گیردار و سه‌لبه‌ساده تحلیل می‌گردد. باید دانست، در حالت یک‌لبه‌گیردار و سه لبه‌ساده، پهلوی BC در شکل (۸) گیردار خواهد بود. پاسخ‌های خیز و لنگر گره میانی صفحه در جدول‌های (۱۰–۸) نمایش داده شده‌اند. همچنین، نمودار هم‌گرایی خیز و لنگر در حالت تکیه‌گاه ساده در

شکل‌های (۹ و ۱۰) آمده است. باید افزود، در حالتی که چهارپهلوی صفحه تکیه‌گاه ساده دارند، نسبت پواسون برابر ۰/۲ درنظر گرفته می‌شود.



شکل ۸ صفحهٔ مربعی با بارگذاری مثلثی

جدول ۸ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با یک لبهٔ گیردار و سه لبهٔ ساده زیر اثر بار مثلثی ($(w_c/(q_0a^4/100D))$)

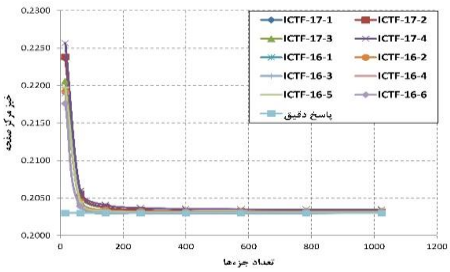
شبکه	۸*۸	۱۶*۱۶	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۱۲۸۹	۰/۱۲۸۴	۰/۱۲۸۴
ICTF-17-2	۰/۱۲۹۰	۰/۱۲۸۴	۰/۱۲۸۵
ICTF-17-3	۰/۱۲۶۷	۰/۱۲۸۰	۰/۱۲۸۳
ICTF-17-4	۰/۱۲۹۹	۰/۱۲۸۷	۰/۱۲۸۷
ICTF-16-1	۰/۱۲۸۴	۰/۱۲۸۳	۰/۱۲۸۴
ICTF-16-2	۰/۱۲۸۶	۰/۱۲۸۴	۰/۱۲۸۴
ICTF-16-3	۰/۱۲۸۴	۰/۱۲۸۳	۰/۱۲۸۴
ICTF-16-4	۰/۱۲۷۶	۰/۱۲۸۰	۰/۱۲۸۳
ICTF-16-5	۰/۱۲۸۵	۰/۱۲۸۳	۰/۱۲۸۴
ICTF-16-6	۰/۱۲۷۱	۰/۱۲۷۹	۰/۱۲۸۳
پاسخ دقیق	۰/۱۳		

جدول ۹ لنگر M_x در مرکز صفحهٔ مربعی با یک لبهٔ گیردار و سه لبهٔ ساده زیر اثر بار مثلثی ($(M_c/(q_0a^2))$)

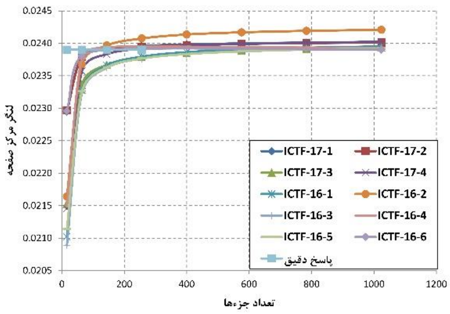
شبکه	۸*۸	۱۶*۱۶	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۰۱۸۷	۰/۰۱۸۹	۰/۰۱۸۹
ICTF-17-2	۰/۰۱۸۷	۰/۰۱۸۹	۰/۰۱۸۹
ICTF-17-3	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۸۸
ICTF-17-4	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۹۰	۰/۰۱۹۰
ICTF-16-1	۰/۰۱۸۹	۰/۰۱۹۳	۰/۰۱۹۳
ICTF-16-2	۰/۰۱۹۱	۰/۰۱۹۵	۰/۰۱۹۶
ICTF-16-3	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۹۳	۰/۰۱۹۳
ICTF-16-4	۰/۰۱۸۴	۰/۰۱۸۷	۰/۰۱۸۸
ICTF-16-5	۰/۰۱۸۹	۰/۰۱۹۳	۰/۰۱۹۳
ICTF-16-6	۰/۰۱۸۵	۰/۰۱۹۰	۰/۰۱۹۰
پاسخ دقیق	۰/۰۱۹۰		

جدول ۱۰ لنگر M_y در مرکز صفحهٔ مربعی با یک لبهٔ گیردار و سه لبهٔ ساده زیر اثر بار مثلثی ($(M_c/(q_0a^2))$)

شبکه	۸*۸	۱۶*۱۶	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۰۱۵۶	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۵۹
ICTF-17-2	۰/۰۱۵۶	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۵۹
ICTF-17-3	۰/۰۱۵۶	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۵۸
ICTF-17-4	۰/۰۱۶۰	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۵۸
ICTF-16-1	۰/۰۱۵۴	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۵۸
ICTF-16-2	۰/۰۱۵۶	۰/۰۱۶۰	۰/۰۱۶۰
ICTF-16-3	۰/۰۱۵۳	۰/۰۱۵۷	۰/۰۱۵۸
ICTF-16-4	۰/۰۱۵۱	۰/۰۱۵۷	۰/۰۱۵۸
ICTF-16-5	۰/۰۱۵۴	۰/۰۱۵۷	۰/۰۱۵۸
ICTF-16-6	۰/۰۱۵۵	۰/۰۱۵۷	۰/۰۱۵۸
پاسخ دقیق	۰/۰۱۶		



شکل ۹ هم‌گرایی خیز در مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه ساده زیر اثر بار مثلثی



شکل ۱۰ هم‌گرایی لنگر در مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه ساده زیر اثر بار مثلثی

پس از انجام واکاوی‌های گسترده، نتیجه‌های زیر در دسترس قرار گرفتند:

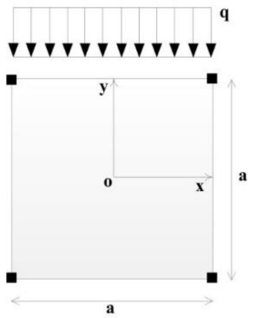
۱- در آرایش ۷ از شکل (۱)، به‌سبب وجود گره میانی و افزایش شمار درجهٔ آزادی نسبت به آرایش شکل (۸-۱)، با ریز شدن شبکه‌بندی، پاسخ‌ها به مقدار دقیق نزدیک‌تر می‌شوند.

۲- از بررسی رفتار جزء ICTF-17-4 نسبت‌به سایر جزءها می‌توان نتیجه گرفت، بهره‌جویی از دسته‌های بالاتر پاسخ معادلهٔ ایستایی و افزایش مرتبهٔ جمله‌ها در تابع میدان، به بهبود نرخ هم‌گرایی کمک می‌کند. باید افزود، دسته‌های با شمارهٔ k در جدول (۱۸) پیوست مشخص شده‌اند و منظور از دسته‌های بالاتر، دستهٔ با شمارهٔ k بزرگ‌تر است.

۳- در دسته‌های با شمارهٔ k زوج در جدول (۱۸)، هر یک از چهار عبارت دسته، جمله‌هایی با مرتبهٔ متقارن دارند. ازاین‌رو، انتخاب تنها یک عبارت از آن دسته می‌تواند کافی باشد و انتخاب شمار بیشتر آنها اختیاری است.

٤- در دسته‌های زوج عبارتی که دارای جمله‌های x^n و y^n می‌باشد، پاسخ‌های سخت‌تری نسبت به آنهایی که این جمله‌ها را دربر نمی‌گیرند، نتیجه می‌دهد. باید دانست، زمانی که نمودار هم‌گرایی از بالا به پاسخ دقیق نزدیک شده است، این جزء سریع‌تر هم‌گرا می‌شود. از سوی دیگر، برای حالتی که هم‌گرایی از پایین باشد، نرخ هم‌گرایی کاهش می‌یابد. خاطرنشان می‌شود، در دسته‌های بالاتر، اثر این عامل بیشتر است.

۵- درصورت انتخاب دو عبارت از دسته‌های زوج، آن دو تایی برداشته می‌شوند که تمامی جمله‌ها از آن مرتبه را دربرگیرند. برای نمونه، در دستهٔ شمارهٔ ٦، دو عبارت ۲۵ و ۲٦ یا ۲٦ و ۲۷ از ۲۵ و ۲۷ بهتر هستند.



شکل ۱۱ صفحهٔ مربعی با چهار ستون در گوشه‌ها زیر اثر بار گستردهٔ یکنواخت

جدول ۱۱ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با چهار ستون در گوشه‌ها زیر اثر بار گستردهٔ یکنواخت $(w_c/(qa^4/10D))$

شبکه	۸*۸	۱٦*۱٦	۲۰*۲۰
ICTF-17-1	۰/۲۶۵۸	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵٦۹
ICTF-17-2	۰/۲٦۵۸	۰/۲۵۷۹	۰/۲۵٦۹
ICTF-17-3	۰/۲٦۵۷	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵٦۸
ICTF-17-4	۰/۲٦٦۱	۰/۲۵۸۳	۰/۲۵۷۳
ICTF-16-1	۰/۲٦۵٦	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵٦۹
ICTF-16-2	۰/۲٦۵٦	۰/۲۵۷۹	۰/۲۵٦۹
ICTF-16-3	۰/۲٦۵٦	۰/۲۵۷۹	۰/۲۵٦۹
ICTF-16-4	۰/۲٦۵۵	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵٦۸
ICTF-16-5	۰/۲٦۵٦	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵٦۹
ICTF-16-6	۰/۲٦۵٤	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵٦۸
T 13-5[31]	۰/۲۵۷۳		
BCIZ[32]	۰/۲٤٤		
Cheung[33]	۰/۲۳٦		

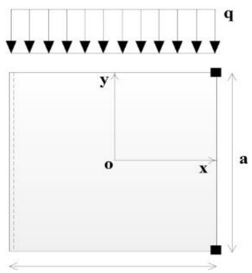
صفحهٔ مربعی با چهار ستون در گوشه‌ها

در این مثال همانند شکل (۱۱) صفحه‌ای مربع‌شکل، که بر روی چهار ستون در گوشه‌های سازه قرار دارد، تحلیل می‌گردد. بار وارد بر صفحه به‌صورت گستردهٔ یکنواخت به شدت q می‌باشد. طول هر پهلوی صفحه برابر با a است. تکیه‌گاه‌های صفحه فقط در چهار گوشه هستند و تکیه‌گاه ساده فرض می‌شوند. شرط‌های مرزی در این نقطه‌ها فقط صفر بودن تغییرمکان قائم می‌باشد (w=0). جدول (۱۱)

دربرگیرندهٔ نتیجهٔ خیز مرکز صفحه درادامه آمده است. در این جدول پاسخ جزءهای پیشنهادی با پاسخ جزء محدود رضائی پژند و اختری [31] با ۷۲ جزء مثلثی و BCIZ [32] با ۷۲ جزء و Cheung و Chan [33] با ۱٦ جزء ۸گرهی مقایسه شده‌اند و می‌توان دریافت که پاسخ جزءهای پیشنهادی با جزء های شناخته‌شده هم‌خوانی دارد.

صفحهٔ مربعی با دو ستون در گوشه‌ها و یک لبه تکیه‌گاه ساده

در این مثال، صفحه‌ی مربعی شکل (۱۲) با تکیه‌گاه ساده در پهلوی سمت چپ و دو ستون در دو گوشهٔ روبه‌رو و بار گستردهٔ یکنواخت با شدت q مورد تحلیل قرار می‌گیرد. جدول (۱۲) گویای نتیجه‌های به‌دست‌آمده برای خیز میانهٔ صفحه می‌باشد. پاسخ‌ها با شبکهٔ ۸جزئی (جزءهای ۱۰گرهی) Cheung و Chan [33] و ۷۲جزئی رضائی پژند و اختری [31] مقایسه شده‌اند و مشاهده می‌شود که نتیجه‌ها نسبت به یکدیگر خطای کمی دارند.



شکل ۱۲ صفحهٔ مربعی با دو ستون در گوشه‌ها و یک لبه تکیه‌گاه ساده و بار گستردهٔ یکنواخت

مقایسهٔ جزءهای کامل و جزءهای ناقص

در این بخش، پاسخ جزءهای کامل و جزءهای ناقص با حل یک مسئله با یکدیگر مقایسه می‌شوند. صفحهٔ مربعی آزمون‌های پیشین، با دو تکیه‌گاه گیردار در دو پهلوی روبه‌رو و دو تکیه‌گاه ساده در دو لبهٔ دیگر و بارگذاری گستردهٔ یکنواخت تحلیل می‌گردد.

همان‌گونه که جدول‌های (۱۳ و ١٤) نشان می‌دهند، نرخ هم‌گرایی جزءهای کامل بسیار کندتر از جزءهای ناقص است. به‌خاطر باید سپرد که شمار درجه‌های آزادی جزءهای کامل بیشتر می باشد.

جدول ۱۲ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با دو ستون در گوشه و یک لبهٔ ساده و بار گستردهٔ یکنواخت ($w_c/(qa^4/10D)$)

شبکه	۸*۸	١٦*١٦	۲۰*۲۰
ICTF-17-1	۰/۱۹۱۹	۰/۱۸۵٦	۰/۱۸٤۸
ICTF-17-2	۰/۱۹۱۹	۰/۱۸۵٦	۰/۱۸٤۹
ICTF-17-3	۰/۱۹۱۷	۰/۱۸۵٦	۰/۱۸٤۸
ICTF-17-4	۰/۱۹۱۹	۰/۱۸۵٦	۰/۱۸٤۹
ICTF-16-1	۰/۱۹۱۸	۰/۱۸۵٦	۰/۱۸٤۹
ICTF-16-2	۰/۱۹۱۹	۰/۱۸۵۷	۰/۱۸٤۹
ICTF-16-3	۰/۱۹۱۸	۰/۱۸۵٦	۰/۱۸٤۹
ICTF-16-4	۰/۱۹۱۷	۰/۱۸۵۵	۰/۱۸٤۸
ICTF-16-5	۰/۱۹۱۹	۰/۱۸۵٦	۰/۱۸٤۹
ICTF-16-6	۰/۱۹۱۵	۰/۱۸۵۵	۰/۱۸٤۸
T 13-5[31]	۰/۱۸۵۲		
Cheung&Chan[33]	۰/۰/۱۷۵		

جدول ۱۳ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه ساده و گیردار و بار گستردهٔ یکنواخت ($w_c/ (qa^4/100D)$)

شبکه	۸*۸	١٦*١٦	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۱۹۸۹	۰/۱۹۳۵	۰/۱۹۲۰
ICTF-17-2	۰/۱۹۹٦	۰/۱۹۳۷	۰/۱۹۲۱
ICTF-17-3	۰/۱۹۷۱	۰/۱۹۳۱	۰/۱۹۲۱
ICTF-17-4	۰/۱۹۷۷	۰/۱۹۳٤	۰/۱۹۲۳
ICTF-16-1	۰/۱۹۳۵	۰/۱۹۲۲	۰/۱۹۱۹
ICTF-16-2	۰/۱۹۳۹	۰/۱۹۲٤	۰/۱۹۲۰
ICTF-16-3	۰/۱۹۳٦	۰/۱۹۲۳	۰/۱۹۱۹
ICTF-16-4	۰/۱۹۵٤	۰/۱۹۲۷	۰/۱۹۲۰
ICTF-16-5	۰/۱۹۳۸	۰/۱۹۲۳	۰/۱۹۱۹
ICTF-16-6	۰/۱۹٤۵	۰/۱۹۲٤	۰/۱۹۱۹
CTF-18-1	۰/۲۰۵٦	۰/۱۹٦۷	۰/۱۹۳۳
CTF-18-2	۰/۲۲۳۸	۰/۱۹۹۹	۰/۱۹۳۳
پاسخ دقیق	۰/۱۹۲۰		

جدول ١٤ لنگر M_x در مرکز صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه ساده و گیردار و بار گستردهٔ یکنواخت $(M_c/ qa^2/10)$

شبکه	۸*۸	١٦*١٦	۳۲*۳۲
ICTF-17-1	۰/۰۱۸۱	۰/۰۲۲۸	۰/۰۲٤۳
ICTF-17-2	۰/۰۱۸۱	۰/۰۲۲۸	۰/۰۲٤۳
ICTF-17-3	۰/۰۱۷٦	۰/۰۲۲۷	۰/۰۲٤۰
ICTF-17-4	۰/۰۱۸۵	۰/۰۲۳۱	۰/۰۲٤۳
ICTF-16-1	۰/۰۱٥٦	۰/۰۲۲۸	۰/۰۲٤٦
ICTF-16-2	۰/۰۱۷۳	۰/۰۲۳٥	۰/۰۲٥۱
ICTF-16-3	۰/۰۱٥۷	۰/۰۲۲۹	۰/۰۲٤٦
ICTF-16-4	۰/۰۱۸۱	۰/۰۲۲۸	۰/۰۲۳۹
ICTF-16-5	۰/۰۱٥۷	۰/۰۲۲۹	۰/۰۲٤٦
ICTF-16-6	۰/۰۱۸۱	۰/۰۲۳۱	۰/۰۲٤۳
CTF-18-1	۰/۰۱۹۸	۰/۰۲۳٤	۰/۰۲٤۲
CTF-18-2	۰/۰۲۰٤	۰/۰۲۳٤	۰/۰۲٤۱
پاسخ دقیق	۰/۰۲٤٤		

رتبه‌بندی جزءهای پیشنهادی

در هر نمونهٔ عددی، پاسخ‌های جزءها برپایهٔ دو معیار نیرو و تغییرمکان، با واکاوی ١٦ نمونهٔ عددی، رتبه‌بندی شده‌اند. به‌دلیل گستردگی حجم کار، تنها به ارائهٔ چند نمونهٔ مهم و کارا در این مقاله بسنده گردید. در تمامی مسئله‌ها، دو رتبهٔ نیرویی و تغییرمکانی از ۱ تا ۱۰ به هر جزء داده شده است که بهترین جزء در رتبهٔ یک قرار دارد. این رده‌بندی برپایهٔ خطای پاسخ و نرخ هم‌گرایی استوار می باشد. در جدول‌های (۱۵ و ١٦)، k_{ij} شمار مسئله‌هایی را نشان می‌دهد که در آنها جزء i رتبهٔ j را گرفته است. بر این پایه، مرتبهٔ کلی جزء در ارائهٔ نیرو و تغییرمکان از رابطه‌های (۱۸ و ۱۹) به‌دست می‌آیند و در جدول (۱۷) نشان داده شده است. باید دانست، از ١٦ نمونهٔ عددی تنها برای ۱۱ مسئله نیروها حساب شدند و تنها در سه نمونه، مقدار M_x و M_y برابر نبودند.

$$R_i = 100\sum_{j=1}^{10} k_{ij} \times (11-j)/140 \tag{۱۸}$$

$$R_i = 100\sum_{j=1}^{10} k_{ij} \times (11-j)/160 \tag{۱۹}$$

جدول ۱۵ رتبه‌بندی جزءها برپایهٔ نیرو

i	نام جزء	k_{ij}										R_i
		j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8	j=9	j=10	
1	ICTF-16-1	۰	۱	۱	۲	۲	۱	۲	۲	۳	۰	۴۸
2	ICTF-16-2	۰	۰	۰	۲	۱	۰	۰	۰	۲	۹	۲۳
3	ICTF-16-3	۰	۱	۱	۰	۱	۳	۳	۲	۲	۱	۴۳
4	ICTF-16-4	۳	۰	۱	۰	۰	۲	۲	۴	۱	۱	۵۰
5	ICTF-16-5	۲	۰	۱	۰	۳	۲	۴	۲	۰	۰	۵۵
6	ICTF-16-6	۰	۵	۱	۲	۲	۳	۰	۱	۰	۰	۶۹
7	ICTF-17-1	۱	۵	۲	۲	۰	۲	۱	۱	۰	۰	۷۳
8	ICTF-17-2	۲	۱	۵	۲	۱	۰	۲	۱	۰	۰	۷۱
9	ICTF-17-3	۰	۱	۰	۲	۲	۰	۰	۰	۶	۳	۳۵
10	ICTF-17-4	۶	۰	۲	۲	۲	۱	۰	۱	۰	۰	۷۸

جدول ۱٦ رتبه بندی جزءها برپایهٔ تغییرمکان

i	نام جزء	k_{ij}										R_i
		j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8	j=9	j=10	
1	ICTF-16-1	۲	۱	۰	۲	۰	۶	۲	۳	۰	۰	۵۶
2	ICTF-16-2	۰	۰	۰	۴	۳	۱	۰	۳	۴	۱	۴۳
3	ICTF-16-3	۰	۲	۲	۰	۱	۰	۶	۱	۴	۰	۴۷
4	ICTF-16-4	۰	۱	۰	۲	۰	۳	۰	۵	۵	۰	۳۹
5	ICTF-16-5	۰	۰	۲	۱	۶	۴	۱	۰	۰	۰	۵۲
6	ICTF-16-6	۲	۰	۰	۳	۱	۰	۱	۰	۱	۸	۳۸
7	ICTF-17-1	۲	۷	۳	۰	۰	۲	۰	۲	۰	۰	۷۷
8	ICTF-17-2	۵	۳	۴	۰	۰	۰	۱	۱	۲	۰	۷۵
9	ICTF-17-3	۰	۰	۲	۳	۲	۰	۲	۱	۱	۵	۴۲
10	ICTF-17-4	۵	۲	۳	۱	۱	۰	۲	۰	۰	۲	۷۲

جدول ۱۷ رتبه‌بندی نهایی جزءها

ملاک رتبه بندی	R_i				
	1	2	3	4	5
برپایهٔ نیرو	ICTF-17-4	ICTF-17-1	ICTF-17-2	ICTF-16-6	ICTF-16-5
برپایهٔ تغییرمکان	ICTF-17-1	ICTF-17-2	ICTF-17-4	ICTF-16-1	ICTF-16-5

دست‌آوردها

در این پـژوهش، تـابع ترفتـز بـرای الگوسـازی خیـز صفحه‌های کیرشهفی به‌کار رفت. این تابع پاسخ بخش همگن معادلهٔ حاکم بر رفتارسازه می‌باشد. هدف یافتن اثر جمله‌های تابع ترفتز در دقـت پاسـخ‌هـای خیـز و لنگـر صـفحه‌هـای خمشـی بـود. درآغـاز، برپایـهٔ دست‌آوردهای پیشینیان و بـا تـلاش در حفـظ تقـارن آرایش درجه‌های آزادی و گره‌ها، از میان هشت گونـه چینش متفاوت، دو جزء مستطیلی بـا ۱۷ و ۱٦ درجـهٔ آزادی انتخاب شدند. تابع میدان این جزءها، بـا ثابـت پنداشتن چیدمان درجه‌های آزادی و انتخاب چند تابع ترفتز ناقص به‌دست آمدند. در رابطه‌سازی جزء کامل، یک تابع میدان مرتبـه‌پـنج از جملـه‌هـای تـابع ترفتـز گزینش شد. این تابع میدان، ۱۵ جملهٔ پیـاپی ترفتـز را دربر می‌گیرد که با سه حرکـت جسـم سـخت، شـمار جمله‌های تابع میـدان بـه ۱۸ مـی‌رسـد. همچنـین، دو آرایش متفاوت با ۱۸ درجهٔ آزادی انتخـاب شـدند. در جـزءهـای نـاقص، تـابع‌هـای میـدان پـس از برپـایی چینش‌های مناسب درجه‌های آزادی بـه‌دسـت آمدنـد. برای جزءهای کامل، نخست تابع میدان کامل برپا شد و پس از آن، آرایش درجه‌های آزادی متناسـب بـا آن انتخاب شد.

از این میان، ده جزء بـا پاسـخ‌هـای برتـر معرفـی گردیدنـد. برپایـهٔ رتبـهٔ هـر جـزء در جـدول (۱۷)، جزءهای ICTF-17-1، ICTF-17-2 و ICTF-17-4 هم در نیرو و هم در تغییرمکان بهتـرین رفتـار را داشـتند. می‌توان وجود یـک گـره و یـک درجـهٔ آزادی بیشـتر نسبت به جزءهای گروه ICTF-16 را دلیل برتری آنها دانست. بنابراین، همان‌گونه که از رتبه‌بندی جـزءهـای گروه ICTF-16 برمی‌آید، چیـنش مناسـب گـره‌هـا و شمار درجه‌های آزادی اهمیت بیشتری نسبت به نحوهٔ انتخاب جمله‌های تابع میدان دارند. بـا مقایسـهٔ پاسـخ این جزءها با پاسخ جزءهای کامل، آشکار گردیـد کـه در بهره جستن از تابع ترفتز، انتخاب تمامی جملـه‌هـا لازم نیست. ازاین‌رو، می‌توان برای بالابردن مرتبهٔ تابع میدان بدون افزایش شـمار درجـه‌هـای آزادی از تـابع ناقص نیز بهره جست و به پاسخ‌های دقیـق‌تـر دسـت یافت. چـون تـابع میـدان معادلـهٔ ایسـتایی را برقـرار مـی‌کنـد، پاسـخ‌هـای نیرویـی بیشـتر جـزءهـا، دقـت فزون‌تری نسبت به پاسخ‌های جابه‌جایی‌ها دارند.

مراجع

۱. کارکن، محمد، «واکاوی خطی و ناخطی هندسی صفحه‌ها برپایهٔ پاسخ تحلیلی»، پایان‌نامهٔ دکترای تخصصی عمران (سازه)، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، (۱۳۹۳).

2. Soh, A.K., Cen, S., Long, Y.Q. and Long, Z.F., "A new twelve DOF quadrilateral element for analysis of thick and thin plates", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 20(2), pp. 299-326, (2001).
3. Sheikh, A.H., Haldar, S. and Sengupta, D., "A high precision shear deformable element for the analysis of laminated composite plates of different shapes", *Composite Structures*, Vol. 55(3), pp. 329-336, (2002).
4. Prathap, G. and Viswanath, S., "An optimally integrated four-node quadrilateral plate bending element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19(6), pp. 831-840, (1983).
5. Somashekar, B.R., Prathap, G. and Babu, C.R., "A field-consistent, four-noded, laminated, anisotropic plate/shell element", *Computers & structures*, Vol. 25(3), pp. 345-353, (1987).
6. Sheikh, A.H., Haldar, S. and Sengupta, D., "A high precision shear deformable element for the analysis of laminated composite plates of different shapes", *Composite Structures*, Vol. 55(3), pp. 329-336, (2002).
7. Rezaiee-Pajand, M. and Mohamadzade, H., "A finite element template for four-sided kirchhoff plate bending element", *J. Civil Environ. Eng.*, Vol. 40, pp. 25–38, (2010), (in Persian).
8. Batoz, J.L. and Katili, I., "On a simple triangular Reissner/Mindlin plate element based on incompatible modes and discrete constraints", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35(8), pp. 1603-1632, (1992).
9. Razaqpur, A.G., Nofal, M. and Vasilescu, A., "An improved quadrilateral finite element for analysis of thin plates", *Finite elements in analysis and design*, Vol. 40(1), pp. 1-23, (2003).
10. Batoz, J.L. and Tahar, M.B., "Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18(11), pp. 1655-1677, (1982).
11. Jirousek, J. and Wroblewski, A., "T-elements: state of the art and future trends", *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 3(4), pp. 323-434, (1996).
12. Jirousek, J. and Leon, N., "A powerful finite element for plate bending", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 12(1), pp. 77-96, (1977).
13. Pian, T.H. and Wu, C.C., "A rational approach for choosing stress terms for hybrid finite element formulations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26(10), pp. 2331-2343, (1988).
14. De Miranda, S. and Ubertini, F., "A simple hybrid stress element for shear deformable plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 65(6), pp. 808-833, (2006).
15. Spilker, R.L. and Munir, N.I., "The hybrid-stress model for thin plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15(8), pp. 1239-1260, (1980).
16. Cen, S., Long, Y. and Yao, Z., "A new hybrid-enhanced displacement-based element for the analysis of laminated composite plates", *Computers & structures*, Vol. 80(9), pp. 819-833, (2002).
17. Jirousek, J., "Hybrid-Trefftz plate bending elements with p-method capabilities", *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 24(7), pp. 1367-1393, (1987).

18. Jirousek, J., Wróblewski, A. and Szybinski, B., "Alternative displacement frame formulations in hybrid-Trefftz Kirchhoff plate p-elements", *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, Vol. 4, pp. 417-452, (1997).
19. Jirouseka, J. and Guex, L., "The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23(4), pp. 651-693, (1986).
20. Qin, Q.H., "Trefftz finite element method and its applications", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 58(5), pp. 316-337, (2005).
21. Petrolito, J., "Analytical formulation of hybrid-Trefftz thick plate elements", *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, Vol. 10(4), pp. 575-586, (2003).
22. Dhananjaya, H.R., Pandey, P.C. and Nagabhushanam, J., "New eight node serendipity quadrilateral plate bending element for thin and moderately thick plates using Integrated Force Method", *Structural engineering and mechanics*, Vol. 33(4), pp. 485-502, (2009).
23. Rezaiee-Pajand, M. and Karkon, M., "Two higher order hybrid-Trefftz elements for thin plate bending analysis", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 85, pp. 73-86, (2014).
24. Rezaiee-Pajand, M., Yaghoobi, M. and Karkon, M., "Hybrid trefftz formulation for thin plate analysis", *International Journal of Computational Methods*, Vol. 9(04), pp. 1250053(1-29), (2012).
25. Herrera, I., "*Boundary methods: an algebraic theory*", Pitman Advanced Pub. Program, (1984).

۲۶. اختری، محمدرضا، «اثر محل گره و نوع درجهٔ آزادی در جزء مثلثی صفحهٔ خمشی»، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد مهندسی عمران (سازه)، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، (۱۳۷۵).

27. Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S., "*Theory of plates and shells*", McGraw-hill, New York, (1959).
28. Wanji, C. and Cheung, Y.K., "Refined quadrilateral discrete Kirchhoff thin plate bending element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40(21), pp. 3937-3953, (1997).
29. Soh, A.K., Long, Z.F. and Cen, S., "A new nine DOF triangular element for analysis of thick and thin plates", *Computational Mechanics*, Vol. 24(5), pp. 408-417, (1999).
30. Yu-qiu, L. and Ke-gui, X., "Generalized conforming element for bending and buckling analysis of plates", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 5(1), pp. 15-30, (1989).
31. Rezaiee-Pajand, M. and Akhtary, M.R., "A family of 13-node plate bending triangular elements", *Communications in numerical methods in engineering*, Vol. 14(6), pp. 529-537, (1998).
32. Zeinkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., "*The Finite Element Method*", 4th Edition, Volume 2, McGraw-Hill, London, (1991).
33. Cheung, Y.K. and Chan, H.C., "A family of rectangular bending elements", *Computers & Structures*, Vol. 10(4), pp. 613-619, (1979).

پیوست یکم- جمله‌های تابع ترفتز

جدول ۱۸ جمله‌های تابع ترفتز

مقدار k	شمارهٔ عبارت	جمله‌های تابع ترفتز	مقدار k	شماره عبارت	جمله‌های تابع ترفتز
۰	۱	x^2+y^2	٤	١٦	$x^6-5x^4y^2-5x^2y^4+y^6$
	–	0		۱۷	$4x^5y-4xy^5$
	۲	x^2-y^2		۱۸	$x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6$
	۳	$2xy$		۱۹	$6x^5y-20x^3y^3+6y^5x$
۱	٤	x^3+xy^2	۵	۲۰	$x^7-9x^5y^2-5x^3y^4+5xy^6$
	۵	x^2y+y^3		۲۱	$5x^6y-5x^4y^3-9x^2y^5+y^7$
	٦	x^3-3xy^2		۲۲	$x^7-21x^5y^2+35x^3y^4-7xy^6$
	۷	$3x^2y-y^3$		۲۳	$7x^6y-35x^4y^3+21x^2y^5-y^7$
۲	۸	x^4-y^4	٦	۲٤	$x^8-14x^6y^2+14x^2y^6-y^8$
	۹	$2x^3y+2xy^3$		۲۵	$6x^7y-14x^5y^3-14x^3y^5+6xy^7$
	۱۰	$x^4-6x^2y^2+y^4$		۲٦	$x^8-28x^6y^2+70x^4y^4-28x^2y^6+y^8$
	۱۱	$4x^3y-4xy^3$		۲۷	$8x^7y-56x^5y^3+56x^3y^5-8xy^7$
۳	۱۲	$x^5-2x^3y^2-3xy^4$	۷	۲۸	$x^9-20x^7y^2+14x^5y^4+28x^3y^6-7xy^8$
	۱۳	$3x^4y+2x^2y^3-y^5$		۲۹	$7x^8y-28x^6y^3-14x^4y^5+20x^2y^7-y^9$
	۱٤	$x^5-10x^3y^2+5xy^4$		۳۰	$x^9-36x^7y^2+126x^5y^4-84x^3y^6+9xy^8$
	۱۵	$5x^4y-10x^2y^3+y^5$		۳۱	$9x^8y-84x^6y^3+126x^4y^5-36x^2y^7+y^9$